მოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

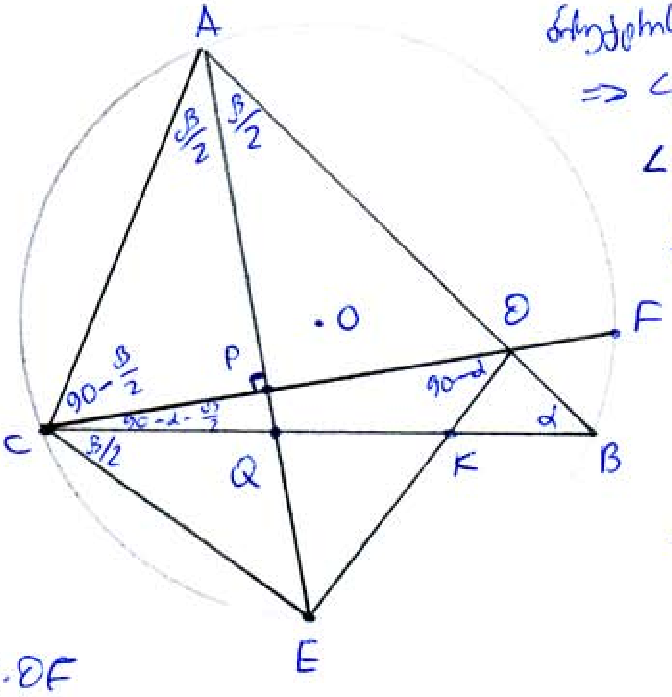
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

29.04.2012/ მათ/ IV/ 310

ამოცანა № 4

გვერდი № 1



$\begin{cases} AC=AD \\ \angle CAE=\angle BAE \end{cases} \Rightarrow AP$ $\triangle ADC$-ში

ბისექტრისაა, სიმაღლეც და მედიანაც

$\Rightarrow \angle CPA=90^\circ$

$\angle ABC=\alpha \Rightarrow AC=2R\sin\alpha$

$\overset{\frown}{AC}=2\alpha$

$\angle APC=\dfrac{\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{FE}}{2}=90^\circ$

$\dfrac{2\alpha+\overset{\frown}{FE}}{2}=90$

$\overset{\frown}{FE}=180-2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow FE=2R\sin(90-\alpha)=$
$=2R\cos\alpha.$

$DK\cdot EF=AC\cdot DF$

$\dfrac{DK}{DF}=\dfrac{AC}{EF}=\dfrac{2R\sin\alpha}{2R\cos\alpha}=tg\alpha$

$\angle CAB=\beta \quad \angle CAP=\dfrac{\beta}{2}=\angle DAP \quad \angle ACP=90-\dfrac{\beta}{2}$

$\angle BCE=\angle EAB=\dfrac{\beta}{2} \quad \angle PCQ=180-\alpha-\beta-(90-\dfrac{\beta}{2})=90-\alpha-\dfrac{\beta}{2}$

AP არის CD-ს შუამართობი $\Rightarrow$ PE არის CD-ს შუამართობი $\Rightarrow \triangle CED$ ტოლფერდა CD ფუძით $\Rightarrow \angle CDE=\angle PCE=90-\alpha-\dfrac{\beta}{2}+\dfrac{\beta}{2}=90-\alpha$

$CD\cdot DF=AD\cdot BD$

$\dfrac{CD}{BD}=\dfrac{\sin\alpha}{\sin(90-\alpha-\frac{\beta}{2})}=\dfrac{AD}{DF}=\dfrac{AC}{DF}=\dfrac{2R\sin\alpha}{DF} \Rightarrow DF=2R\sin(90-\alpha-\dfrac{\beta}{2})$

$$\frac{OK}{OF} = tg\alpha$$

$$OK = OF\, tg\alpha = 2R\sin\left(90-\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\cdot tg\alpha$$

$$\frac{OK}{CK} = \frac{\sin\left(90-\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}{\sin(90-\alpha)} = \frac{\cancel{\sin\left(90-\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}}{\cos\alpha} = \frac{2R\cancel{\sin\left(90-\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}\cdot tg\alpha}{CK}$$

$$CK = 2R\, tg\alpha\cdot\cos\alpha = 2R\sin\alpha = AC \;\Big|\Rightarrow \frac{CK}{AC} = 1$$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

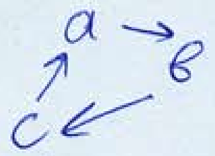
მაგიდა № [redacted]

29.04.2012/ მათ/ IV/ 3/0

ამოცანა № 5

გვერდი № 1

აქ $m=1$ მაშინ: ცხადია ვისაც ჩემპიონი უგებს ვთქვათ $a \to b$ a უგებს b-ს. a-ს უნდა მოეგოს ვინმეს, ვთქვათ $c \to a$, c უგებს a-ს. და n-ის მინიმალური მნიშვნელობა რომ იყოს b-მ უნდა მოიგოს c-ს $b \to c$.



ანუ როცა $m=1$ $n \geq 3$ $3=2^{1+1}-1 = 2^{m+1}-1$. $n \geq 2^{m+1}-1$.

ავიღოთ ნებისმიერი m გუნდი. ვთქვათ მათ მოუგო ჩემპიონმა ω_1-მა.
ამ m გუნდს დავარქვათ $L_1, L_2, \ldots, L_m$.
„>" ნიშნავს რომ მარცხენა უგებს მარჯვენას. „<" პირიქით.

$\omega_1 > L_1; L_2; \ldots; L_m$

L_1 განვიხილოთ ამ m გუნდთან და ამ წყვილის ჩემპიონი ω_1; ცხადია ასეთი ვინც უგებს მათ იქნება ω_2. ცხადია ω_2 არ არის L_1 იმიტომ რადგან $L_1<\omega_1$. განვიხილოთ L_2 და ჩემპიონი ω_2. ასე განვაგრძოთ სანამ არ ამოვწურავთ ყველა m გუნდს მივიღებთ $\omega_1\ \omega_2 \ldots \omega_m$. ამ ჩემპიონებს შორის ერთ-ერთი ω არ იქნება ერთ-ერთი L რადგან $\omega_1 > L_1; L_2; \ldots L_m$. ასევე ამ $\omega_1\ \omega_2 \ldots \omega_m$ ყველას უგებს ვიღაც X გუნდი. რომელიც არ არის L_i $(i \in (1;m))$. ანუ უკვე მივიღეთ $2m+1$ გუნდი:
$L_1\ L_2 \ldots L_m\ \omega_1\ \omega_2 \ldots \omega_m\ X$ ანუ ვიღებთ შეფასებას რომ $\underline{n \geq 2m+1}$.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

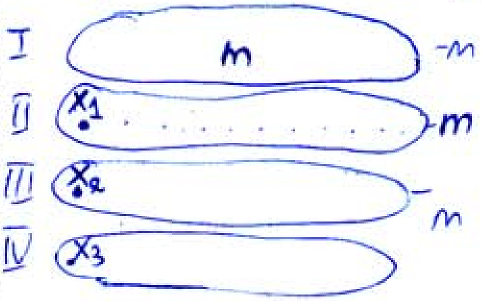
29.04.2012/ მათ/ IV/ 3/0

ამოცანა № 5

გვერდი № 2

ჩვენი [illegible] [illegible] გამომდინარეობს, რომ L_m აქვს $\omega_1\ \omega_2 \ldots \omega_m$-ის [illegible] [illegible] [illegible] ω [illegible], რომელიც ~~[illegible]~~ m [illegible] [illegible], L_m [illegible] [illegible] ის m [illegible]. ანუ ეს n [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] m [illegible] სხვა [illegible].

ავიღოთ ნებისმიერი m [illegible]:



[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] და m-[illegible] [illegible] x_1. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], რომელიც [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] II [illegible] და m-ზე [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] I [illegible].

ანუ I [illegible] i [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] II [illegible] [illegible] $(1; i-1)$ და I-ში $(1; m-i+1)$. [illegible] [illegible] x_2 [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], რომ [illegible] [illegible] $x_1 - i, x_2 - i$, [illegible] [illegible] [illegible] და [illegible] [illegible] [illegible] I და II [illegible] [illegible] [illegible], [illegible], რომ [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible].

$\boxed{h \geq 3m}$

IV-ში [illegible] ანუ x_3 [illegible] x_1, x_2 და III [illegible] [illegible] და [illegible] [illegible]. [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] რომ [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] $x_1, x_2, x_3 - i$. [illegible] [illegible] [illegible] $m-2$. [illegible] [illegible] $4m-1$ [illegible] ანუ $\boxed{h \geq 4m-1}$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

29.04.2012/ მათ/ IV/ 310

ამოცანა № 6

გვერდი № 1

$P(m) = (m+d_1)(m+d_2)\dots(m+d_8)(m+d_9)$

20-მდე გვაქვს 8 ცალი მარტივი რიცხვი 2 3 5 7 11 13 17 19.

რადგან ყველა d_i განსხვავებულია, ამიტომ განსხვავებულია ყველა $(m+d_i)$-ები.

d-ს უდიდესი მნიშვნელობაა 9 $\Rightarrow m > 9^8$

$P(m)-P(x) \vdots (m-x)$

თუ $P(m)$ იყოფა K მარტივ რიცხვზე ნებისმიერ x-ისათვის და $K>20$

$P(x) \vdots K \Rightarrow P(m)-P(x) \vdots K \Rightarrow P(m) \vdots K$

~~ვთქვათ იყოფა K მარტივ რიცხვზე რომელიც მეტია 20-ზე. მაშინ ავიღოთ ისეთი m_1 რომ $m_1+d_1 \vdots K \Rightarrow P(m_1) \vdots K \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow P(m_1)-P(m) \vdots$~~